



TITLE:

# 熱対流における空間カオス(熱対流の数理)

AUTHOR(S):

佐藤, 敦史; 平山, 修; 高木, 隆司

---

CITATION:

佐藤, 敦史 ...[et al]. 熱対流における空間カオス(熱対流の数理). 数理解析研究所講究録 1996, 970: 166-176

ISSUE DATE:

1996-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/60672>

RIGHT:

## 熱対流における空間カオス

東京農工大学 佐藤 敦史 (Atsushi Sato)

平山 修 (Osamu Hirayama)

高木 隆司 (Ryuji Takaki)

### Abstract

Temperature-dependent viscosity is an important factor for thermal convection in solidifying material or mantle convection, but its effect has not been clarified yet. In this paper numerical computation of two-dimensional Bénard convection with temperature-dependent viscosity of exponential type is made Rayleigh number 3000 and Prandtl number  $10^8$ , and for various aspect ratio  $W$  of the fluid-area and log viscosity ratio  $c$ . For  $W = 6, 8, 10$  and  $c = 6, 8$ , stationary but chaotic roll patterns were obtained (denoted as a spatial chaos). A possibility is suggested to interpret the randomness of sizes of geological plates in terms of this spatial chaos.

(KEY WORD): Bénard Convection, Temperature-dependent viscosity, Spatial Chaos

## 1 はじめに

水飴や蠟のような物質の粘性率は強く温度に依存しており、この水飴の粘性率は $-20^{\circ}\text{C}\sim 80^{\circ}\text{C}$ の間で $10^8$ 倍もの変化がある。このような流体は、均一な粘性率の流体と比較して、流れのパターン形成や対流の構造に大きな差異を生み出す。基礎物理学の観点からは、温度依存粘性率が対流パターンの生成にどのような影響を与えるのかという問題があり、これはまだ未解決である。

温度依存粘性を持つ流体の熱対流は、凝固する物体中の熱対流、あるいは大陸移動の原因であるプレート運動を引き起こしているマントル対流を研究する際にも重要な意味をもつ。さらに、大地震などの地学現象にも大きく関係していると思われる。

この問題の重要なパラメータは、レイリー数、プラントル数、ヌセルト数そして対数粘性率比（上下境界の温度に対応する粘性率の比の対数）。

本論では、熱対流の解析で通常採用される方程式系に、粘性率の温度依存を取り入れ、数値的に定常解を求める。特に、温度依存性の強さ（粘性率比）と流体領域のアスペクト比（横サイズ／縦サイズ）が、ロールの形と配列パターンのカオティックな振る舞いにどんな影響を与えるか詳細に解析する。

## 2 基礎方程式と境界条件

解析する対流領域を Fig.1 に示す。流れはブジネスク近似にしたがい、2次元であると仮定し、水平、垂直方向に  $x$  軸、 $y$  軸をとる。

境界条件として、4辺の境界で stress free, 上下の水平境界面での温度はそれぞれ  $T = T_H$ ,  $T = T_L$ , 左右の境界では、水平方向の温度勾配は 0 とする。したがって、水平方向に  $2Wd$  を周期として無限に広がっている領域と考えてよい ( $W$  はアスペクト比)。粘性率の温度依存性を、次式のように指数関数型に仮定する。

$$\nu = \nu_0 \exp \{c(0.5 - T)\} \equiv \nu_0 F(T) \quad (1)$$

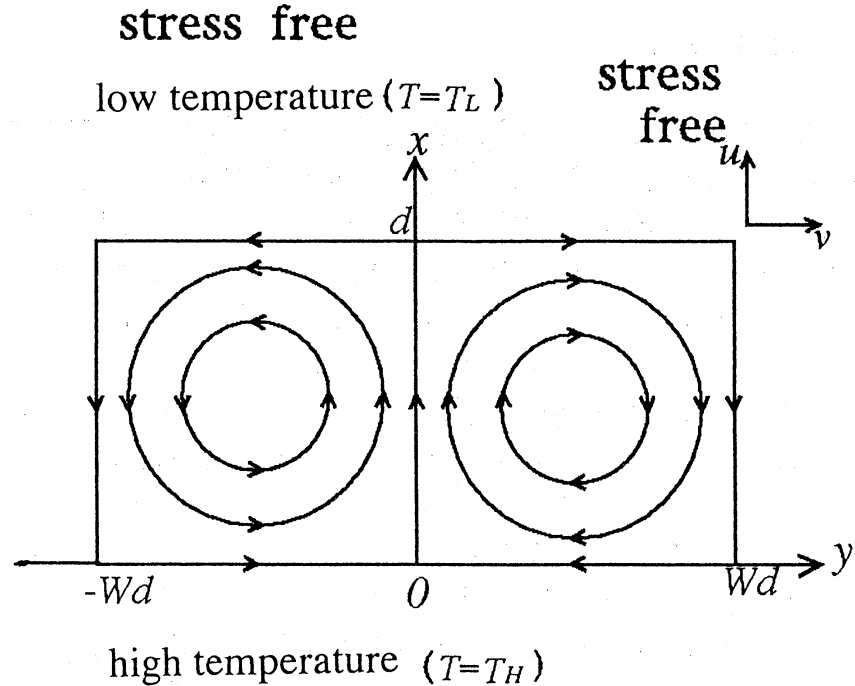


Figure 1: 解析する対流領域の配置図

$\nu_0$ は上下の境界面の間値  $T = 1/2$  での動粘性率であり,  $c = \ln(\nu_{max}/\nu_{min})$  は対数粘性率比である. 浮力は

$$F_y = g\alpha(T - T_0) \quad (2)$$

と表わされる.  $g$ は重力加速度,  $\alpha$ は体膨張率であり, 一定と仮定する. ただし,  $T_0$ は基準点での温度である. Fig.2に, いくつかの  $c$  の値に対する動粘性率の温度変化を示す.

$x, y$ , 時間  $t$ , 流れ関数  $\psi$ , 渦度  $\omega$ , 温度  $T$  を,  $d, \delta T = T_H - T_L$ , 温度拡散率  $\kappa$  を用いて次のように無次元化する. ただし, 次元をもつ変数は  $\tilde{\cdot}$  をつけることにする.

$$x = \tilde{x}d, \quad y = \tilde{y}d, \quad t = \frac{d^2}{\kappa} \tilde{t}, \quad \psi = \tilde{\psi}\kappa, \quad \omega = \frac{\kappa}{d^2} \tilde{\omega} \quad (3)$$

$$T = T_L + \delta T \tilde{T} \quad (4)$$

ただし,  $F(T)$  は元来無次元である.

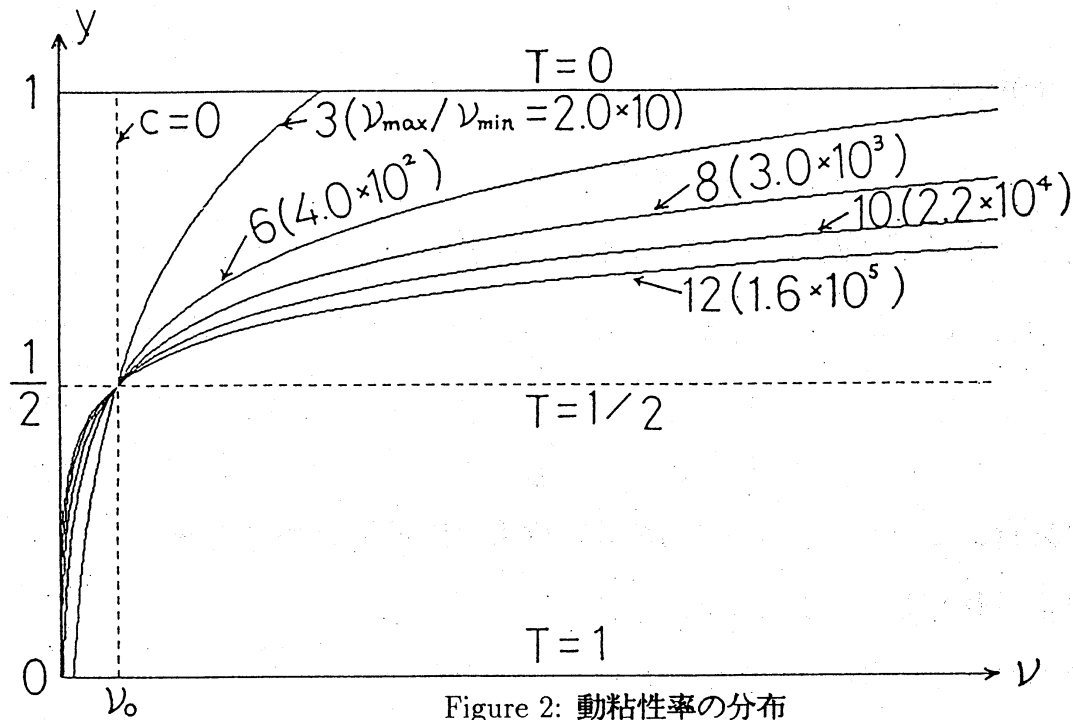


Figure 2: 動粘性率の分布

無次元化された定常状態の渦度方程式は（ $\sim$ を省略すると），

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\omega, \psi)}{\partial(x, y)} = & P_{r0} [F \Delta \omega + 2F' (T_x \omega_x + T_y \omega_y) \\ & - \{F' (T_{xx} - T_{yy}) + F'' (T_x^2 - T_y^2)\} (\psi_{xx} - \psi_{yy}) \\ & - 4(F' T_{xy} + F'' T_x T_y) \psi_{xy}] + P_{r0} R_{a0} T_x, \end{aligned} \quad (5)$$

ただし， $P_{r0}$ ， $R_{a0}$ は，

$$P_{r0} = \frac{\nu_0}{\kappa}, \quad (6)$$

$$R_{a0} = \frac{g \alpha \Delta T d^3}{\kappa \nu_0} \quad (7)$$

で定義される無次元パラメタである．

熱伝導方程式は，無次元化によって（やはり $\sim$ を省略して），

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \Delta T \quad (8)$$

となる.

$\psi$ と $\omega$ の関係式は

$$\omega = -\Delta - \psi = -(\psi_{xx} + \psi_{yy}). \quad (9)$$

無次元化された境界条件は, 下記のとおりである.

$$\psi = 0, \quad \omega = 0, \quad \text{at } y = 0, \quad y = 1, \quad x = 0, \quad x = W, \quad (10)$$

$$T = 1, \quad \text{at } y = 0, \quad (11)$$

$$T = 0, \quad \text{at } y = 1. \quad (12)$$

本論の数値シミュレーションで用いた数値は以下のとおりである.

- 対数粘性率比  $c$ ; 0, 1, 3, 6, 8
- アスペクト比  $W$ ; 1, 3, 6, 8, 10
- レイリー数  $Ra$ ; 3000
- プラントル数  $P_{r0}$ ;  $10^8$
- 格子数;  $W = 1$  の時に  $x, y$  方向に各 30 個 ( $W > 1$  のときは, 水平方向に  $30w$  個)

逐次近似法の初期試行状態として, 1 個から 10 個までのロール数をもつ状態を与えた. 数値計算は, 一様な正方形メッシュを用い, 中心差分を用いて式 (5), (8), (9) を差分化した.

### 3 結果

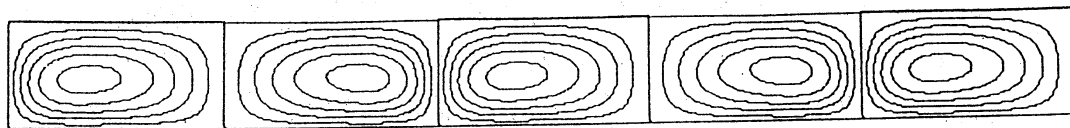


Figure 3:  $W = 10, c = 3$ , 与えた初期のロールの個数 :  $m = 5$

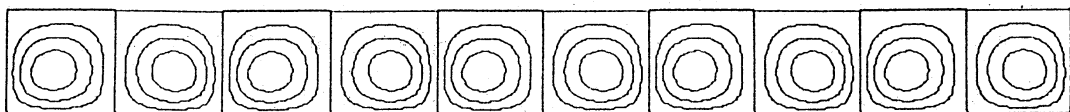


Figure 4:  $W = 10, c = 3$ , 与えた初期のロールの個数 :  $m = 1, 10$



Figure 5:  $W = 10, c = 6$ , 与えた初期のロールの個数 :  $m = 9$

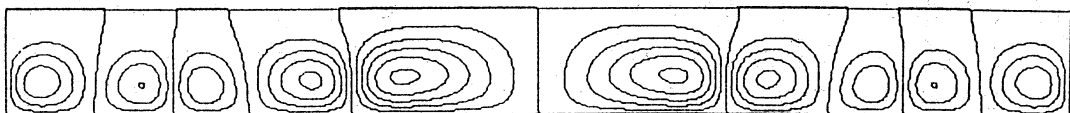


Figure 6:  $W = 10, c = 6$ , 与えた初期のロールの個数 :  $m = 1$

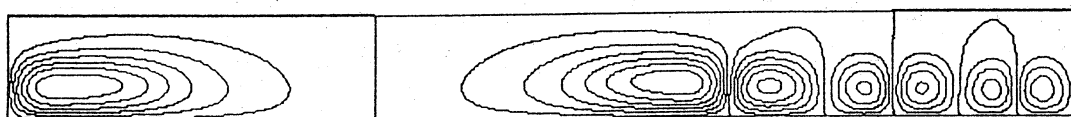


Figure 7:  $W = 10, c = 8$ , 与えた初期のロールの個数 :  $m = 8$

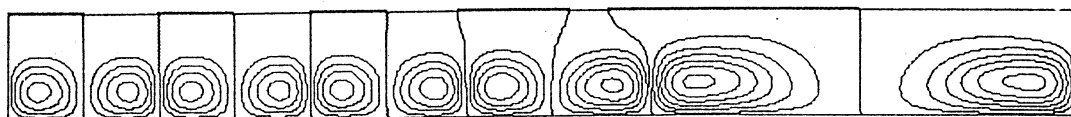


Figure 8:  $W = 10, c = 8$ , 与えた初期のロールの個数 :  $m = 5$

逐次近似解が収束して求められた定常解について、流線図を Fig.3~8に示す。  $c \geq 6$  は、異なるサイズのロールが不規則に並ぶ解が得られた。この場合、出現したロールの大きさのばらつき度を定量化するために、ランダムネスパラメタ  $R$  を、ロールの最大の水平サイズを最小のサイズで割ったもので定義する。例えば、等しいロールが並んだ場合、 $R$  は 1 である。

以下、 $W$  の値ごとに結果を説明する。説明の便宜上、ロールの形が全て同じもの（反転対称も含む）の場合を「等しいロール」と呼び、2種類以上のロールの形が認められた場合は「不規則なロール」と呼ぶ。

$W = 10$ ,  $c = 3$  のときは、等しいロール解が 6 通り得られた。その中でロール数最大のもので最小のものを Fig.3, 4 にしめす。

$W = 10$ ,  $c = 6$  のときは不規則なロール解が 5 通り、等しいロールが 2 通り得られた。そのうちの 2 つを Fig.5, 6 に示す。ランダムネスパラメタは 2.5~3.6 の間に分布した。

$W = 10$ ,  $c = 8$  のときは不規則なロール解が 3 通り、等しいロールは 6 通り得られた。そのうちの 2 つを Fig.7, 8 にしめす。ランダムネスパラメタは 2.8~6.6 の間に分布した。

アスペクト比  $W$  が 10 の場合について求めた、ランダムネスパラメタ  $R$  と対数粘性率比  $c$  の関係を Fig.9 に示す。不規則なロールが現れたものは、 $c = 6$  および、8 の場合であった。 $c = 6$  のほうが、不規則ロールの出現確率、出現パターンの数共に高かった。また、 $R$  はアスペクト比  $W$  とともに  $R$  も大きくなる傾向がみられた (Fig.9)。  $c = 4, 5$  については目下計算中である。

ここで、得られた不規則ロールについて、Fig.10 のように、 $y = 1/3$  の各格子での流速 ( $u, v$ ) と温度  $T$  の変動の関係を、Fig.11, 12 に表わしてみた。

不規則ロールでは複雑な曲線を得、等しいロールのものでは、1 周の曲線が得られた。本来、空間カオスの定義はまだはっきりしていないが、Fig.11, 12 のような図から空間カオスの定義が得られるかもしれない。



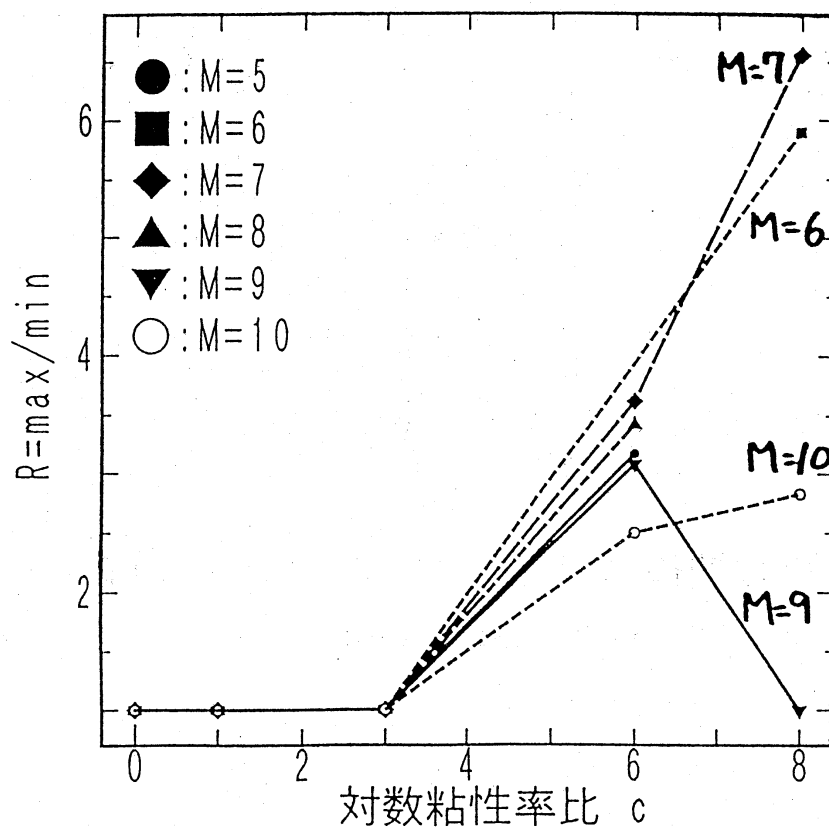


Figure 9: ランダムネスパラメタと対数粘性率比の関係 ( $W = 10$ )

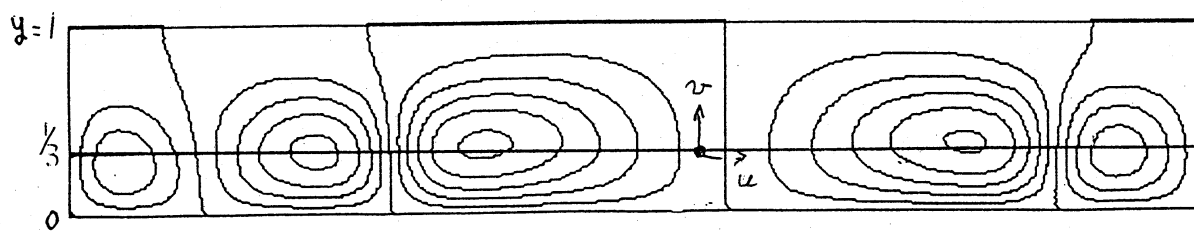
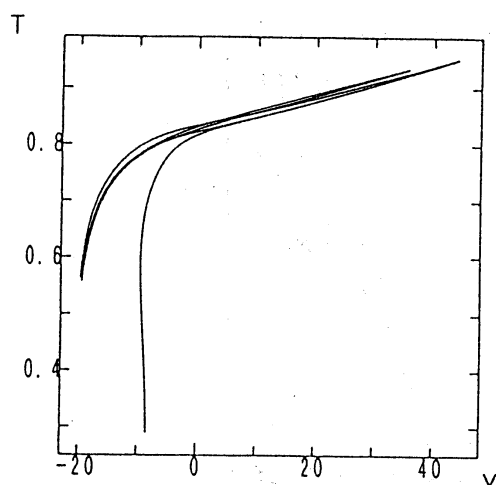
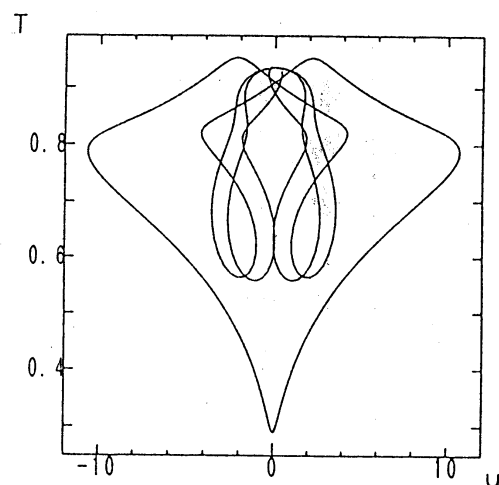


Figure 10: 値のとりかた

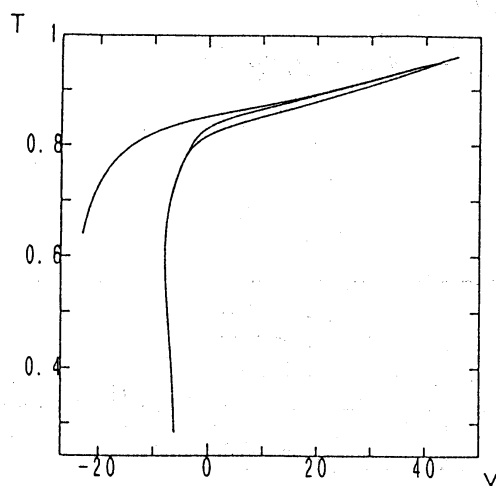


$v$  と  $T$  の関係

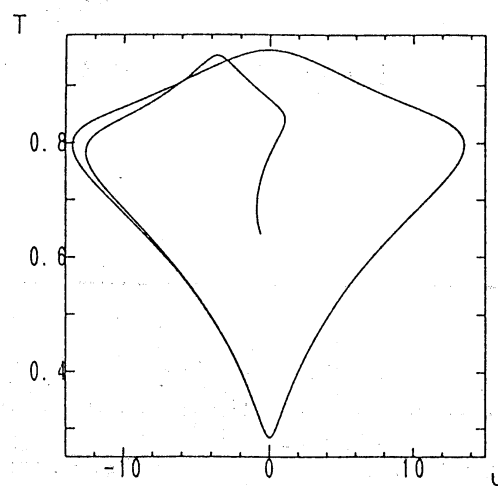


$u$  と  $T$  の関係

Figure 11:  $u, v$  と  $T$  の関係 ( $c = 6, W = 10, m = 1$ )



$v$  と  $T$  の関係



$u$  と  $T$  の関係

Figure 12:  $u, v$  と  $T$  の関係 ( $c = 6, W = 10, m = 5$ )

## 4 おわりに

空間カオスを本論で求めた定常状態の対流禍で定義することを試みてはいるが、なかなかうまくいかない。時間的なカオスを判定する基準を箇条書きにすると

- 無秩序で不規則に見える信号が時間的に継続していること。
- 周波数の広い領域で、信号のパワースペクトルが特定のピークをもたず、なだらかに広がっていること。
- 自己相関がすぐに消滅してしまうこと。
- ポアンカレ断面内に無数の点で埋めつくされた有限面積の領域が現れること。

一方、空間カオスを本当に定義するには、空間が無限に続いているような状態を設定しなくてはならない。時間カオスの大きな特徴のひとつである「初期値に鋭敏な反応」が空間カオスにおいては如何にして表わされるかということもこれからの課題である。

## References

- [1] B.Blankenbach, et al., *A benchmark comparison for mantle convection codes*, *Geophys. J.Int*, **98** 23-38, (1989).
- [2] Osamu HIRAYAMA & Ryuji TAKAKI: 温度依存粘性率をもつ流体の熱対流, 日本流体力学会誌「ながれ」, **11** 第2号別冊, 107-120, (1992)
- [3] Osamu HIRAYAMA & Ryuji TAKAKI: 温度依存粘性率をもつ流体の熱対流 (2), 日本流体力学会誌「ながれ」, **11** 第3号別冊, 200-211, (1992).
- [4] Osamu HIRAYAMA & Ryuji TAKAKI: 温度依存粘性率をもつ流体の熱対流の安定性, 日本流体力学会誌「ながれ」, **12** 第2号別冊, 169-181, (1993).
- [5] 飯田 誠一: 熱流体系に見られるカオス, 108-126
- [6] 高見 穎郎 & 河村 哲也: 偏微分方程式の差分解法, 東京大学出版会 (1994).
- [7] 木田 重雄: 流体方程式の解き方入門, 共立出版 (1994).